



Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

- A. Σχολικό βιβλίο σελίδα 66.
 B. Σχολικό βιβλίο ορισμός, σελίδα 132.
 Γ. i) Σ ii) Λ iii) Σ iv) Σ v) Λ

ΘΕΜΑ 2^ο

α) $x^2 - 4x + 3 = 0$ (1)
 $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$
 (1) $\Leftrightarrow x = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow (x = 1 \text{ ή } x = 3)$.

β) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + 8$, έχει διακρίνουσα $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4$ και ρίζες
 $x = \frac{6 \pm 2}{2} \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 4)$.

Το πρόσημο του τριωνύμου, παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$
$x^2 - 6x + 8$	+	-	-	+

Από τον πίνακα συμπεραίνουμε, ότι $2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (2, 4)$.

γ) $(x^{10} + 1)(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4x + 3) \geq 0$ (2)

Η παράσταση $x^{10} + 1$ είναι θετική για κάθε $x \in \mathbb{R}$, διότι: $x^{10} \geq 0 \Rightarrow x^{10} + 1 > 0$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 4x + 3$ προκύπτει εύκολα, δεδομένου ότι από το α) ερώτημα έχουμε τις ρίζες του, άρα εκτός των ριζών θα είναι θετικό και εντός των ριζών αρνητικό.

Το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - 6x + 8$ έχει βρεθεί στον πίνακα του β) ερωτήματος.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει το πρόσημο της παράστασης $(x^{10} + 1)(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 4x + 3)$.

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$x^{10} + 1$	+	+	+	+	+	+
$x^2 - 6x + 8$	+	+	0	-	-	+
$x^2 - 4x + 3$	+	0	-	-	0	+
Γινόμενο	+	0	-	0	-	+

Από τον πίνακα συμπεραίνουμε, ότι:

$$(2) \Leftrightarrow (x \leq 1 \text{ ή } 2 \leq x \leq 3 \text{ ή } x \geq 4) \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2, 3] \cup [4, +\infty).$$

ΘΕΜΑ 3^ο

$$x^2 - \lambda x + 3\lambda = 0 \quad (1)$$

α) $\Delta = \lambda^2 - 12\lambda = \lambda(\lambda - 12)$

Η (1) έχει δύο άνισες ρίζες, άρα $\Delta > 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda - 12) > 0 \Leftrightarrow (\lambda < 0 \text{ ή } \lambda > 12)$.

Το πρόσημο του τριωνύμου $\lambda(\lambda - 4)$ προκύπτει εύκολα, δεδομένου ότι οι ρίζες του είναι 0 και 12, άρα εκτός των ριζών θα είναι θετικό.

β) Για $\lambda = -4$: $x^2 + 4x - 12 = 0 \quad (1')$

i) Το γινόμενο των ριζών ισούται με $\frac{\gamma}{\alpha}$, άρα $x_1 \cdot x_2 = \frac{-12}{1} = -12 < 0$, άρα οι ρίζες είναι ετερόσημες.

Παρατήρηση Θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις ρίζες 2 και -6, που ασφαλώς είναι ετερόσημες.

ii) Η απόλυτη τιμή είναι μη αρνητικός αριθμός και η ρίζα x_2 είναι αρνητικός, επομένως η ανίσωση είναι αδύνατη, δεδομένου ότι ένας μη αρνητικός δεν είναι δυνατόν να είναι μικρότερος ή ίσος από έναν αρνητικό.

iii) Η (1'), έχει διακρινούσα $\Delta = \lambda(\lambda - 12) = (-4)(-16) = 64$

Οι ρίζες της είναι: $x = \frac{-4 \pm 8}{2} = \begin{cases} 2 \\ -6 \end{cases}$, επομένως, $x_1 = 2$ και

$$\sqrt[3]{x_1 \sqrt{x_1}} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{2^2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[2]{2} = \sqrt{2}.$$

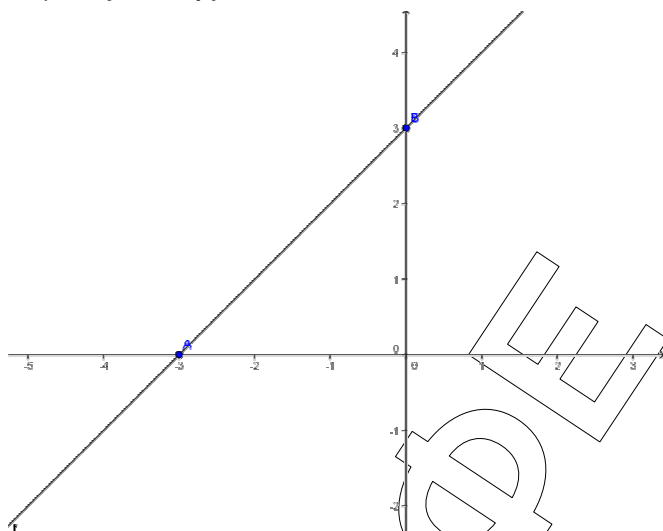
ΘΕΜΑ 4^ο

α) Για να σχηματίζει, η ευθεία με εξίσωση $y = \left(|\lambda| - \frac{1}{2}\right)x + 3$, γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ θα πρέπει η κλίση της να ισούται με $\text{εφ} 45^\circ = 1$.

Δηλαδή απαιτούμε να ισχύει:

$$|\lambda| - \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (\lambda = \frac{3}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{3}{2}).$$

- β) i) Για $\lambda = \frac{3}{2}$ έχουμε $f(x) = x+3$ της οποίας η γραφική παράσταση είναι η ευθεία με εξίσωση $y = x + 3$.



Αν $y = 0$ είναι $x = -3$, ενώ αν $x = 0$ είναι $y = 3$.

Άρα η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $A(-3,0)$ και τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0,3)$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Α' τρόπος

- ii) Ο τύπος της συνάρτησης f είναι της μορφής $f(x) = ax + \beta$, με $a = 1 > 0$. Επομένως ο συντελεστής του x στον τύπο της συνάρτησης f είναι θετικός πραγματικός αριθμός, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- iii) Για κάθε πραγματικό αριθμό a , ισχύει: $a^2 > -1 \stackrel{f \uparrow}{\Rightarrow} f(a^2) > f(-1)$.

Β' τρόπος

- ii) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 3 < x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Επομένως δείξαμε ότι για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$. Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .
- iii) $f(a^2) > f(-1) \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} a^2 + 3 > 2 \Leftrightarrow a^2 > -1$
Η τελευταία είναι αληθής για κάθε πραγματικό αριθμό a , αφού το πρώτο μέλος ως τετράγωνο πραγματικού είναι μη αρνητικός. Συνεπώς, λόγω των ισοδυναμιών, αληθεύει και η αρχική.